

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, în care $b_2 = 20$ și $b_3 = 100$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x \cdot 3^3 = 3^{x+2}$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(6,2)$ și $C(4,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele AC și OB sunt paralele.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 32 și $BC = AB\sqrt{2}$. Arătați că $AC = 8$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = \begin{pmatrix} 2x & 3x & -3 \\ -x & -2x & 1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(M(0)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $M(x) \cdot M(y) - xyI_3 = (x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $M(1) \cdot M(x) - M(2) \cdot M\left(\frac{x}{2}\right) = 2M(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5(x-1)(y-1) + 1$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 1$.
- 5p** b) Arătați că $e = \frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x - 2 + \ln x}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 3$.
- 5p** c) Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+4}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f(x) e^x dx = 10$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 5 - \frac{6}{e}$. |
| 5p | c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$. Arătați că
$I_{n+1} + 4I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n . |

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = \frac{b_3}{b_2} = 5$, unde q este rația progresiei geometrice	3p
	$b_1 = \frac{b_2}{q} = 4$	2p
2.	$f(a) = 4a + 3$, $g(a) = a - 3$, pentru orice număr real a	3p
	$4a + 3 = a - 3$, de unde obținem $a = -2$	2p
3.	$3^{2x+3} = 3^{x+2}$, de unde obținem $2x + 3 = x + 2$	3p
	$x = -1$	2p
4.	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 3 numere n pentru care $\sqrt{n}$ este număr natural par, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	3p
5.	$m_{OB} = \frac{1}{3}$	2p
	$m_{AC} = \frac{a-3}{3}$ și, cum $m_{OB} = m_{AC}$, obținem $a = 4$	3p
6.	$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $B = \frac{\pi}{4}$, deci $AB = AC$	3p
	$\frac{AB \cdot AC}{2} = 32$, de unde obținem $AC = 8$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$	3p
b)	$M(x) \cdot M(y) - xyI_3 = \begin{pmatrix} xy & 0 & -3x - 3y - 3 \\ 0 & xy & x + y + 1 \\ 0 & 0 & xy + x + y + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xy & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3(x + y + 1) \\ 0 & 0 & x + y + 1 \\ 0 & 0 & x + y + 1 \end{pmatrix} = (x + y + 1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y	2p
c)	$M(1) \cdot M(x) - M(2) \cdot M\left(\frac{x}{2}\right) = xI_3 + (x + 2)M(0) - xI_3 - \left(\frac{x}{2} + 3\right)M(0) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)M(0)$, pentru orice număr real x	3p
	$\left(\frac{x}{2} - 1\right)M(0) = 2M(0)$, de unde obținem $x = 6$	2p

2.a)	$1 * 3 = 5(1-1)(3-1) + 1 =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$x * \frac{6}{5} = 5(x-1)\left(\frac{6}{5}-1\right) + 1 = x-1+1 = x$, pentru orice număr real x $\frac{6}{5} * x = 5\left(\frac{6}{5}-1\right)(x-1) + 1 = x-1+1 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$\frac{m}{25} * n = n * \frac{m}{25} = \frac{6}{5}$, de unde obținem $5\left(\frac{m}{25}-1\right)(n-1) + 1 = 5(n-1)\left(\frac{m}{25}-1\right) + 1 = \frac{6}{5}$ $(m-25)(n-1) = 1$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(24,0)$ și $(26,2)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x - (2x - 2 + \ln x)}{x^2} =$ $= \frac{2x + 1 - 2x + 2 - \ln x}{x^2} = \frac{3 - \ln x}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2 + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 2 + \ln x)'}{(x \ln x)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \frac{1}{x}}{x \ln x + 1} = 3$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^3$; pentru orice $x \in (0, e^3]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(0, e^3]$ și, pentru orice $x \in [e^3, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e^3, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $f(e^3) = 2 + \frac{1}{e^3} \in (2, 3)$ și f este continuă, deci cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție este 2	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 f(x) e^x dx = \int_0^2 (x+4) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right) \Big _0^2 =$ $= 2 + 8 = 10$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x+4)(-e^{-x})' dx = (x+4)(-e^{-x}) \Big _0^1 - e^{-x} \Big _0^1 =$ $= -\frac{5}{e} + 4 - \frac{1}{e} + 1 = 5 - \frac{6}{e}$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n e^x}{x+4} dx$, de unde obținem $I_{n+1} + 4I_n = \int_0^1 \frac{(x^{n+1} + 4x^n) e^x}{x+4} dx = \int_0^1 x^n e^x dx$, pentru orice număr natural nenul n Cum $e^x \leq e$, pentru orice $x \in [0, 1]$, obținem $I_{n+1} + 4I_n \leq e \int_0^1 x^n dx = e \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p