Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $2\cdot(1{,}1+0{,}3)-1{,}8=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a\cdot f(0)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2+x-1}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3>10$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(2,0)$ și $C(8,2)$. Determinați distanța dintre punctul A și mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=10$ și $\sin B=\frac{2}{5}$. Arătați că $AC=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2+2x & x\\ -x & 2-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(2)\cdot A(1)+3A(-2)=16I_2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m)=\frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-3X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=1$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $3x_1+3x_2+3x_3-x_1x_2x_3=3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=9$, determinați rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-8}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-4e^2\le f(x)\le e^3$, pentru orice $x\in[-3,4]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+\frac{2\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{2\ln x}{x}\right)dx=15$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\left(f(x)-6x\right)dx=1$.

5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^{e^2}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af\left(e^2\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(1{,}1+0{,}3)-1{,}8=2\cdot 1{,}4-1{,}8=$	**2p**
	$=2{,}8-1{,}8=1$	**3p**
2.	$f(0)=4$, $f(a)=2a+4$, pentru orice număr real a	**2p**
	$2a+4=4a$, de unde obținem $a=2$	**3p**
3.	$2-x=x^2+x-1$, de unde obținem $x^2+2x-3=0$	**2p**
	$x=-3$ sau $x=1$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 7 numere n care verifică inegalitatea $n^3>10$, deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{7}{10}$	**3p**
5.	$M(5,1)$, unde punctul M este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$AM=5$	**2p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$, deci $\frac{2}{5}=\frac{AC}{10}$	**3p**
	$AC=\frac{2\cdot 10}{5}=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}4&1\\-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}4&1\\-1&0\end{vmatrix}=4\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$A(2)=\begin{pmatrix}6&2\\-2&-2\end{pmatrix}$, $A(2)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}22&6\\-6&-2\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $A(-2)=\begin{pmatrix}-2&-2\\2&6\end{pmatrix}$, obținem $A(2)\cdot A(1)+3A(-2)=\begin{pmatrix}16&0\\0&16\end{pmatrix}=16I_2$	**2p**
c)	$B(m)$ este inversa matricei $A(m)\Leftrightarrow A(m)\cdot B(m)=B(m)\cdot A(m)=I_2\Leftrightarrow \frac{4-3m^2}{m}I_2=I_2$	**3p**
	$\frac{4-3m^2}{m}=1$, de unde obținem $m=-\frac{4}{3}$, care nu convine, sau $m=1$, care convine	**2p**
2.a)	$f=X^3-3X^2-3X+1\Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1=$	**3p**
	$=-1-3+3+1=0$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2x_3=-a\Rightarrow 3x_1+3x_2+3x_3-x_1x_2x_3=9+a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$9+a=3$, de unde obținem $a=-6$	**2p**
c)	$f=X^3-3X^2-3X+9=(X-3)(X^2-3)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului sunt $x_1=3$, $x_2=-\sqrt{3}$ și $x_3=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2xe^x-\left(x^2-8\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2+2x+8}{e^x}=\dfrac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=-8$, $f'(0)=8$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=8x-8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=4$; pentru orice $x\in[-3,-2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[-3,-2]$ și, pentru orice $x\in[-2,4]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[-2,4]$	**3p**
	$f(-3)=e^3$, $f(-2)=-4e^2$ și $f(4)=\dfrac{8}{e^4}<e^3$, de unde obținem $-4e^2\le f(x)\le e^3$, pentru orice $x\in[-3,4]$	**2p**
2.a)	$\int_2^3\left(f(x)-\dfrac{2\ln x}{x}\right)dx=\int_2^3 6x\,dx=3x^2\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=27-12=15$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)-6x\right)dx=\int_1^e\dfrac{2\ln x}{x}dx=\int_1^e 2\ln x(\ln x)'dx=\ln^2 x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln^2 e-\ln^2 1=1$	**2p**
c)	$\int_1^{e^2}\left(\dfrac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=\int_1^{e^2}\left(f(x)\ln x\right)'dx=f(x)\ln x\Big\vert_1^{e^2}=f\left(e^2\right)\ln e^2=2f\left(e^2\right)$	**3p**
	$2f\left(e^2\right)=af\left(e^2\right)$ și, cum $f\left(e^2\right)\ne 0$, obținem $a=2$	**2p**